עקיפה בגלי אור

- בגלי מים קל מאוד לראות אפקט של עקיפה: גלים היוצאים ממפתח צר ממשיכים ישר, אבל חלקם גם פונה לצדדים.
- בגלי אור נראה עקיפה, אבל הסיבה לעקיפה קשה לתצפית: המפתח גדול משמעותית מאורך הגל.
- כאשר המפתח קרוב לאורך הגל, קל לזהות את העקיפה ולצפות בה.
- לדוגמה: טיפות מים בקשת, הילה סביב הירח, הילה סביב פנסי מכוניות על חלון הרכב, סריג עקיפה.
- בעקיפה מדברים על ההשפעה של מפתחים על קרן אחת.
- בהתאבכות, הדומה לעקיפה, מדברים לרוב על חיבור מכוון של שתי קרנים או יותר.
- בפתרון מלא של הבעיה יש לחשב את האינטרקציה של גל אלקטרו-מגנטי עם מפתח המשנה את המשרעת או את מופע הגל.
- לצורך הפתרון יש לחשב את משוואות מקסוול עם תנאי השפה של המפתח, למשל בפיזור מי (Mie).
- ניתן להקל ולחשב בקירוב, בצורה סקלרית את התקדמות הגל, בהסתמך על עיקרון הויגנס.
- זהו קירוב הגל הסקלרי (Scalar wave approximation).

קירוב הגל הסקלרי

- יש צורך לחשב בעקרון את קירוב הגל הסקלרי עבור כל רכיב של קיטוב הגל, אך לרוב אין צורך.
- כיוון הקיטוב חשוב לעתים. למשל עבור עקיפה ממפתח מתכתי מוליך:
  - נקודות עמוק בתוך המפתח יקרינו כרגיל, כי השדה יכול להיות בכל כיוון בתווך חופשי.
  - נקודות על המתכת לא יקרינו כלל, כי השדה $\mathbf{E}$ הוא אפס בתוך מוליך.
  - נקודות סמוך לקצה המפתח יקרינו יותר כאשר השדה ניצב לקצה המפתח ביחס לשדה מאונך לו: השדה המקבילי $\mathbf{E}_{||}$ משתנה ברציפות מאפס במתכת לערכו בחוץ, והשדה המאונך $\mathbf{E}_{\perp}$ אינו רציף. האפקט לא יהיה מורגש, חוץ במקרים של עצמים בגודל אורך הגל, כמו סריג עקיפה מדורג (blazed) ומקטב חוטים מתכתיים.
- בהזנחת הקיטוב, נפשט את המודל של שני שדות וקטוריים מתנדנדים.
- נשתמש בגל סקלרי מרוכב ψ בתדר ω ובוקטור גל k_0 שגודלו ω / c בכיוון תנועת הגל.
- גורם המופע התלוי בזמן $\exp(i\omega t)$ אינו משתנה בעת החישוב, ועל כן אין רושמים אותו למרות שהוא קיים.

עקיפה מעקרון הויגנס

- נחשב את העקיפה מכל נקודות המפתח לפי עקרון הויגנס בצורה אינטואיטיבית.
- אור עובר את המסכה $\mathcal{R}$ ויוצר גלים חדשים. בכל אלמנט שטח ds הופך הגל ψ_1 לגל חדש.
- עוצמת הגל החדש היא $a_S = f_S \psi_1 \,\mathrm{d}s$ ותלויה בפונקצית ההעברה f_S בנקודה S. למשל 0 או 1, לפי ההעברה.
- מופע הגל הנוצר זהה למופע הגל המקורי – המערכת שומרת על קוהרנטיות.
- נתאר את הגל הכדורי הנפלט מהנקודה Q על ידי

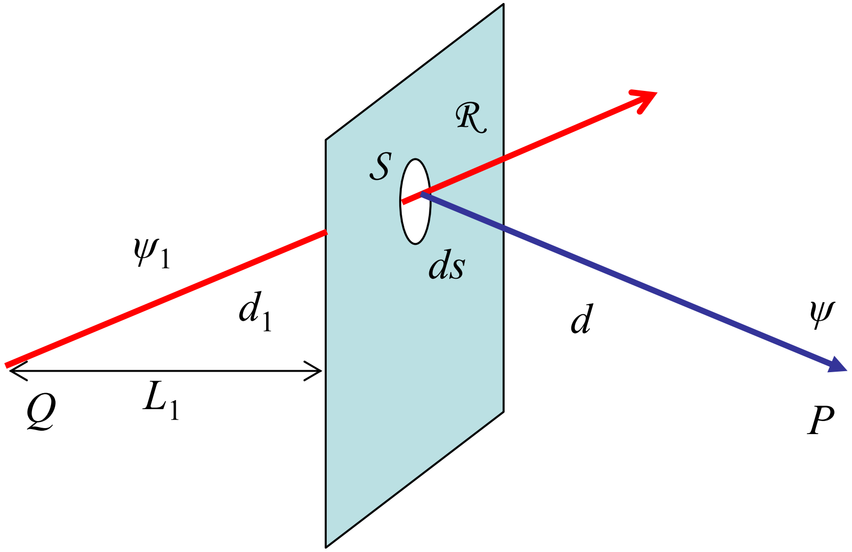
$$\psi_1 = \frac{a_Q}{d_1}\exp\left(ik_0 d_1\right)$$

- נתאר את הגל הכדורי הנפלט מהנקודה S על ידי

$$a_S = f_S \psi_1 \,\mathrm{d}S = f_S \frac{a_Q}{d_1}\exp\left(ik_0 d_1\right)\mathrm{d}S$$

- נתאר את הגל הכדורי המגיע לנקודה P על ידי

$$\mathrm{d}\psi = f_S \psi_1 \,\mathrm{d}S = f_S \frac{a_Q}{dd_1}\exp\left[ik_0\left(d_1 + d\right)\right]\mathrm{d}S$$

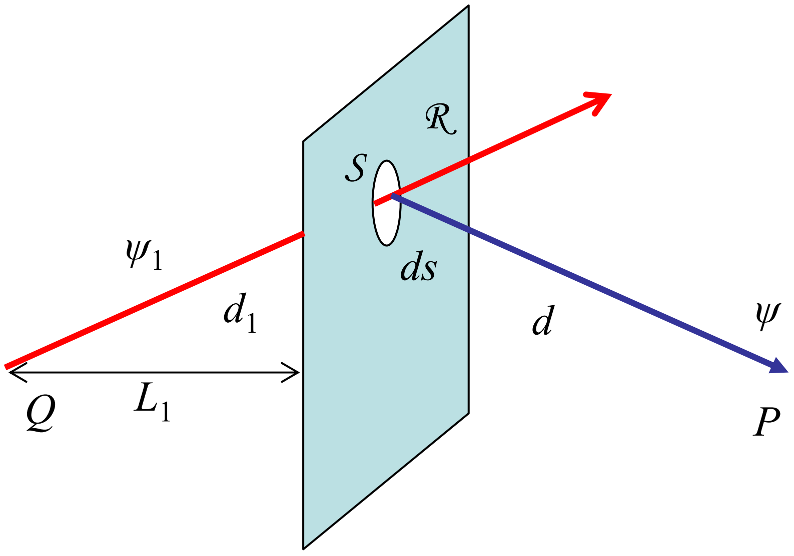


מגבלות העקיפה מעקרון הויגנס

- נסכם את התרומות מכל חלקי המסך $\mathcal{R}$

$$\psi_P = a_Q \iint_{\mathcal{R}} \frac{f_S}{dd_1} \exp\left[ik_0\left(d_1 + d\right)\right] \mathrm{d}\,S$$

- עקרון הויגנס מניח שעוצמת הגל לאחר הכיפוף היא 1, אבל למעשה יש גורם נטייה קרוב ל-1.
- חסר גורם ik_0 לאחר הפיזור.
- פרט לפרטים אלו, עיקרון הויגנס מספק לנו פתרון טוב לתאור העקיפה.



עקיפה לפי קירכהוף

- החשבון שעשה קירכהוף מוצג כבעית תנאי שפה ואינו כולל קירובים כחשבון הויגנס.
- שדה אלקטרומגנטי בתחום מוגבל נקבע על ידי תנאי השפה של התחום.
- ראינו שממשואת הגלים קיבלנו

$$\nabla^2\psi = -\frac{\omega^2}{c^2}\psi = -k_0\psi$$

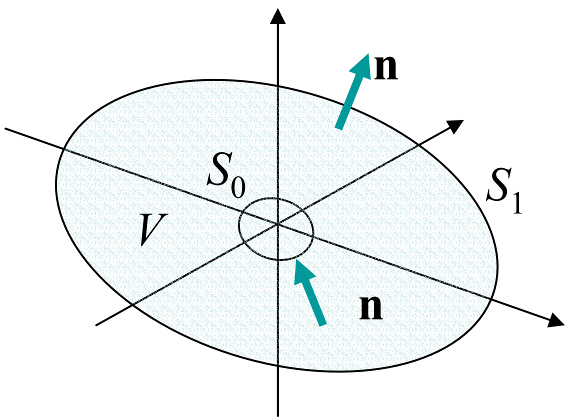
- כזכור, משואה זו תקפה לכל רכיב של השדה החשמלי או המגנטי.
- ננסה לכתוב את השדה בכל נקודה בתחום המוגבל באמצעות ערכי השדה ונגזרותיו על השפה.
- במקרים הפשוטים בהם הגלים מתפשטים ממקור נקודתי, הפתרון דומה לפתרון מעקרון הויגנס.
- נשוה את הפתרון של משואת הגלים לפתרון אפשרי: הגל הכדורי המתפשט מהראשית

$$\psi_t = \frac{a_t}{r}\exp\left(ik_0 r\right)$$

- פתרון זה מקיים את משואת הגלים בכל מקום חוץ מהראשית עצמה.
- נגדיר את הראשית כנקודת התצפית P שבה ערך הגל הוא $\psi(0)$.

חישוב מדויק של העקיפה

- שני השדות של הגלים הם ψ, שיש לחשב, ו- ψ_t, שהיא גל היחוס המתכנס. הם מקיימים את המשוואה



$$\psi\nabla^2\psi_t - \psi_t\nabla^2\psi = -\psi k_0\psi_t + \psi_t k_0\psi = 0$$

- משואה זו תקפה בכל המרחב פרט לראשית.
- נחשב את האינטגל של המשואה על נפח V המוגבל על ידי משטח S :

$$\iiint_V \left(\psi\nabla^2\psi_t - \psi_t\nabla^2\psi\right)\mathrm{d}V = \iint_S \left(\psi\nabla\psi_t - \psi_t\nabla\psi\right)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

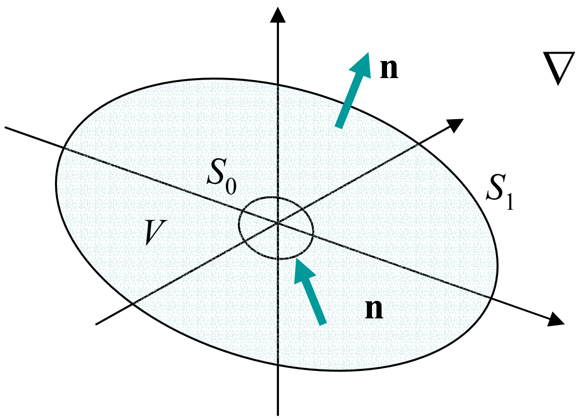
- עברנו מנפח למשטח לפי משפט גרין. הוקטור **n** ניצב החוצה מן המשטח S בכל נקודה.
- כיון שהאינטגרנד הוא אפס, כך גם האינטגרל.
- זאת בתנאי שהנפח לא כולל את הראשית. לכן המעטפת S דו גליונית, והנפח V בין שני הגליונות.
- הגליון החצוני S_1 בעל צורה כללית, והפנימי S_0 בעל צורה כדורית ורדיוס זניח, קטן מאורך גל. מקבלים:

$$\iint_{S_0} \left(\psi\nabla\psi_t - \psi_t\nabla\psi\right)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_1} \left(\psi\nabla\psi_t - \psi_t\nabla\psi\right)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 0$$

חישוב העקיפה

$$\iint_{S_0}\left(\psi\nabla\psi_t-\psi_t\nabla\psi\right)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S+\iint_{S_1}\left(\psi\nabla\psi_t-\psi_t\nabla\psi\right)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=0$$

- נחשב את הגראדינט של ψ_{t}



$$\nabla\psi_t=\frac{a_t\mathbf{r}}{r^2}ik_0\exp\left(ik_0r\right)-\frac{a_t\mathbf{r}}{r^3}\exp\left(ik_0r\right)$$

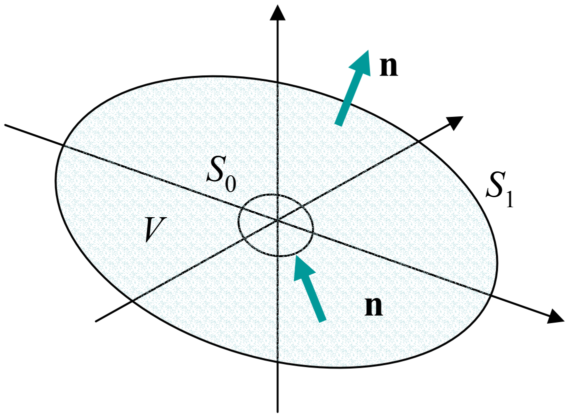
$$=\frac{a_t\mathbf{r}}{r^3}\left(ik_0r-1\right)\exp\left(ik_0r\right)$$

- מציבים באינטגרל לעיל ומקבלים

$$\iint_{S_0+S_1}\frac{a_t}{r^3}\exp\left(ik_0r\right)\left[\psi\left(ik_0r-1\right)\mathbf{r}+r^2\nabla\psi\right]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

- נחשב קודם את התרומה על המשטח הפנימי S_0 שעליו הגל ψ קבוע ושעורו $\psi(0)$.
- במקרה זה גם $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{r}$ בגלל כיווניהם ההפוכים. יחידת השטח היא $\mathrm{d}S=r^2\mathrm{d}\Omega$ ומקבלים

חישוב אנליטי של העקיפה



$$\iint_{S_0} \frac{a_t}{r^3}\exp(ik_0r)\left[\psi(ik_0r-1)\mathbf{r}+r^2\nabla\psi\right]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{S_0} \frac{a_t}{r^3}\exp(ik_0r)\left[\psi(0)(ik_0r-1)\mathbf{r}+r^2\nabla\psi(0)\right]\cdot\mathbf{n}r^2\,\mathrm{d}\Omega$$

$$=-\iint_{S_0} a_t\exp(ik_0r)\left[\psi(0)(ik_0r-1)\hat{\mathbf{r}}-r\nabla\psi(0)\cdot\mathbf{n}\right]\mathrm{d}\Omega$$

- כעת משאיפים את הנפח הפנימי לאפס, או את הרדיוס **r** לאפס. נשאר רק

$$-\iint_{S_0} a_t\exp(ik_0r)\psi(0)\,\mathrm{d}\Omega\xrightarrow[r\to0]{}-4\pi a_t\psi(0)$$

- לאחר צמצום המשרעת a_t נשארים עם

$$\iint_{S_1} \frac{1}{r^3}\exp(ik_0r)\left[\psi(ik_0r-1)\mathbf{r}+r^2\nabla\psi\right]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=4\pi\psi(0)$$

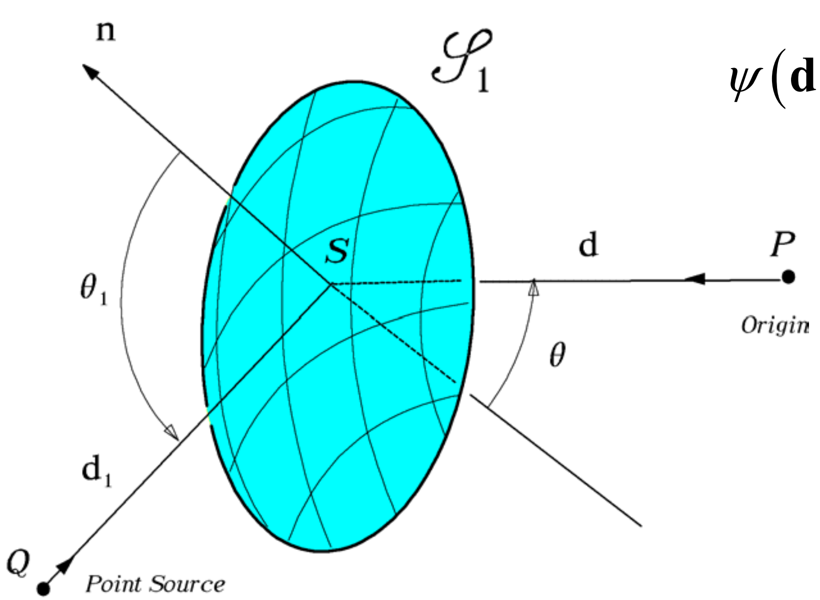
- אם הנפח אינו מכיל את הראשית, הוא אינו קיים באינטגרל וצד ימין של המשואה ומתאפס.

תאורה ממקור נקודתי

- נניח שהאור נפלט ממקור נקודתי Q . נתבונן בנקודה S במרחק d מן הראשית ובמרחק d_1 מן המקור.
- המשרעת של הגל בנקודה S היא בשיעור

$$\psi = \frac{a_Q}{d_1}\exp\left(ik_0 d_1\right)$$

- שוב אנו מניחים פונקצית ההעברה f_S בנקודה S. הקרינה הנפלטת בנקודה $\mathbf{d}$ היא



$$\psi\left(\mathbf{d}\right) = \frac{f_S a_Q}{d_1}\exp\left(ik_0 d_1\right)$$

- ונגזרתה היא

$$\nabla\psi\left(\mathbf{d}\right) = \frac{f_S a_Q \mathbf{d}_1}{d_1^3}\left(ik_0 d_1 - 1\right)\exp\left(ik_0 d_1\right)$$

עקיפה ממקור נקודתי

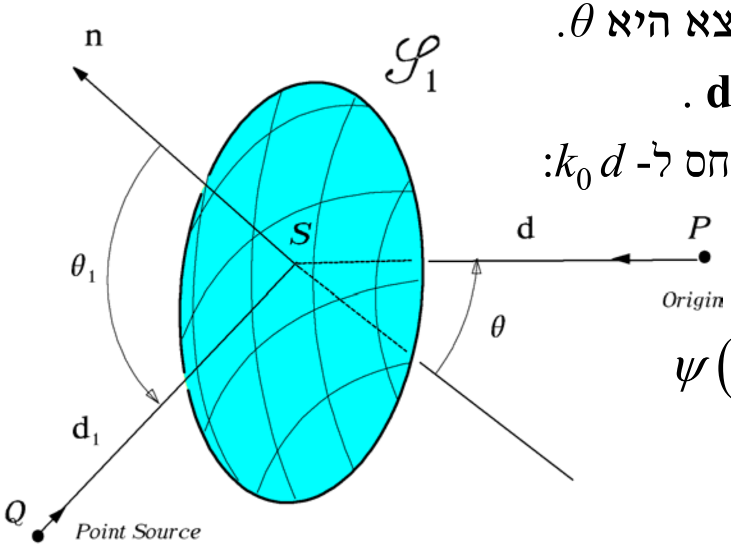
- נציב את הגל ואת נגזרתו בביטוי שקיבלנו קודם

$$\iint_{S_1} \frac{1}{r^3} \exp(ik_0 r)\left[\psi(ik_0 r - 1)\mathbf{r} + r^2 \nabla \psi\right] \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = 4\pi\psi(0)$$

- ונקבל

$$a_Q \iint_{S_1} f_S \exp\left[ik_0(d + d_1)\right]\left[\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}}{d_1 d^3}(ik_0 r - 1) - \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{n}}{d d_1^3}(ik_0 d_1 - 1)\right] \mathrm{d}S = 4\pi\psi(0)$$

- הזוית בין הנורמל לשטח לגל הנכנס היא θ_1 והזוית לגל היוצא היא θ.
- המכפלות הסקלריות הן $\mathbf{d} \, . \, \mathbf{n} = d \cos\theta$ ו- $\mathbf{d}_1 . \, \mathbf{n} = -d_1 \cos\theta_1$.
- אם המרחקים d, d_1 גדולים בהרבה מאורך הגל ניתן להזניח 1 ביחס ל- $k_0 d$:

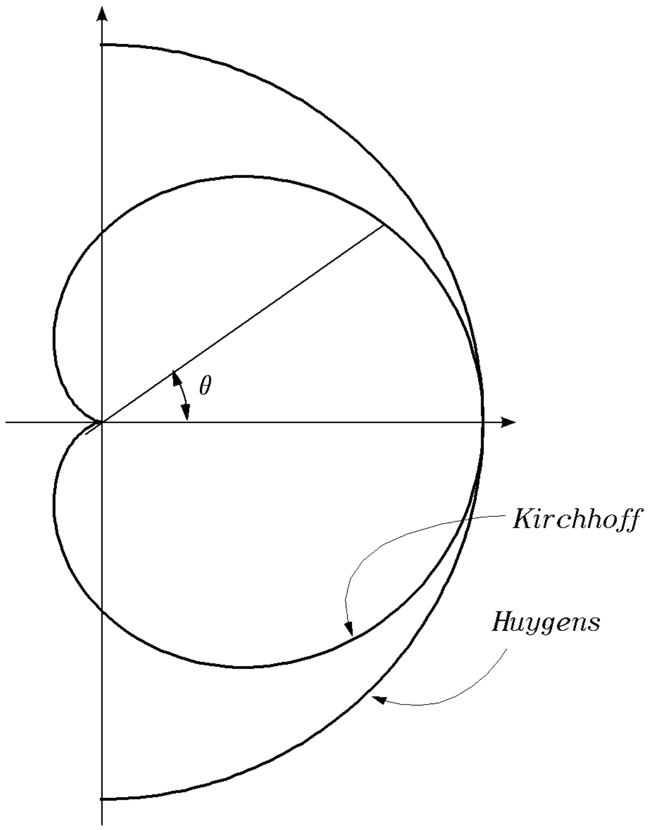


$$\psi(0) = \frac{ik_0 a_Q}{2\pi} \iint_{S_1} \frac{f_S}{dd_1} \exp\left[ik_0(d + d_1)\right] \frac{\cos\theta + \cos\theta_1}{2} \, \mathrm{d}S$$

הויגנס וקירכהוף

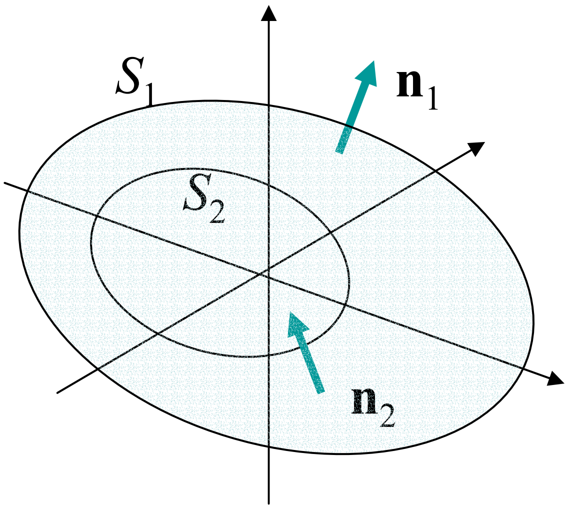
$$\psi(0)=\frac{ik_0 a_Q}{2\pi}\iint_{S_1}\frac{f_S}{dd_1}\exp\left[ik_0\left(d+d_1\right)\right]\frac{\cos\theta+\cos\theta_1}{2}\,\mathrm{d}S$$

- זהו ביטוי הגדול פי $ik_0(\cos\theta+\cos\theta_1)/4\pi$ מן הביטוי שפיתחנו בפשטות מעקרון הויגנס.
- הרכיב $(\cos\theta + \cos\theta_1) / 2$ הוא גורם הנטייה (inclination factor) שערכו בערך 1 בזויות קטנות (הקרוב הפרקסיאלי).
- בזויות גדולות יותר (אך חשובות פחות) שונה גורם הנטיה בשני החשבונות.
- לגורם המופע i ולגורם $k_0/2\pi$ חשיבות פיסיקלית.



גורם הנטיה

$$\frac{\cos\theta + \cos\theta_1}{2}$$



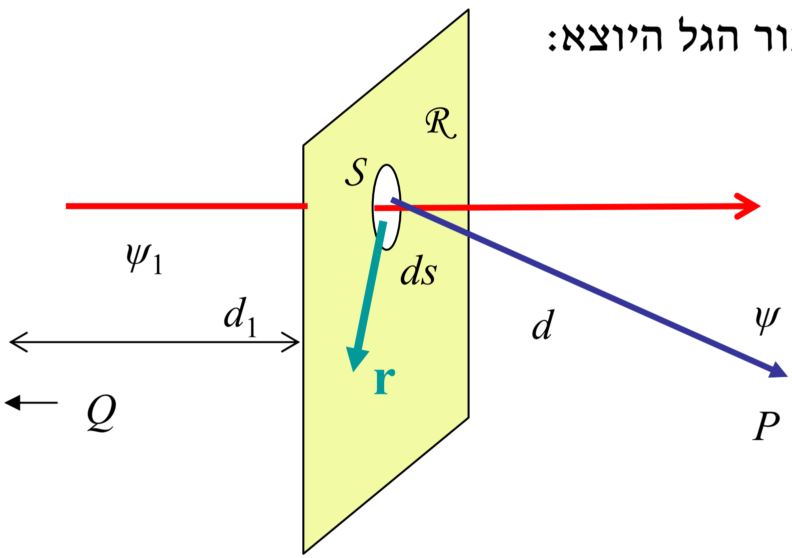
- גורם הנטיה עולה בקנה אחד עם בניית הויגנס המזניחה קרינה אחורה.
- תלוי בשתי הזויות בנפרד, הזוית בין הנורמל לשטח לגל הנכנס θ_1 והזוית לגל היוצא θ. כלומר תלוי גם במשטח השרירותי שבחרנו, S_1.
- ננסה לבחור משטח שרירותי אחר S_2 ונחשב את תרומתו. אם האינטגרנד הוא I

$$4\pi\psi(0) = \iint_{S_2} I = \iint_{S_2} I + \left(\iint_{S_1} I - \iint_{S_2} I \right)$$

- וזאת כיון שהערך של הגל בראשית אינו תלוי במשטח.
- ראינו שהאינטגרל על המשטח הכפול S_1 S_2 (שאינו מכיל את הראשית) הוא אפס.
- לכן הפרש האינטגרלים בסוגרים מתאפס.
- לרוב בוחרים את המפתח מאונך לגל הנכנס מטעמי נוחיות, ואז התלות רק ב- θ.

סוגי עקיפה

- נתבונן במערכת המוארת על ידי גל מישורי, כלומר המקור רחוק מאוד ובהיר מאוד, ביחס קבוע $A' = a_Q / d_1$.
- נשים את המעטפת S_1 בחפיפה עם המפתח $\mathcal{R}$, שמחוצה לו $f_S = f(\mathbf{r}) = 0$.
- בנוסף, נחפוף את המפתח $\mathcal{R}$ עם הגל המגיע. מקבלים עבור הגל היוצא:



$$\psi = \frac{ik_0 A'}{2\pi} \exp(ik_0 d_1) \iint_{\mathcal{R}} \frac{f(\mathbf{r})}{d} \exp(ik_0 d)\, \mathrm{d}^2\mathbf{r}$$

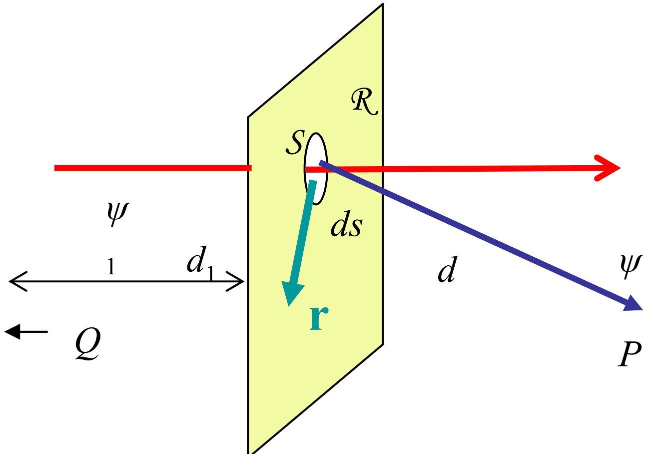
$$= \frac{ik_0 A}{2\pi} \iint_{\mathcal{R}} \frac{f(\mathbf{r})}{d} \exp(ik_0 d)\, \mathrm{d}^2\mathbf{r}$$

- הכנסנו את גורם המופע הקבוע לתוך המקדם A.
- העוצמה בנקודה P היא $I = |\psi|^2 = \psi\psi^*$.
- ההבדלה בין עקיפת פרנל ופראונהופר תלויה בהשתנות גורם המופע $k_0 d$ בעת המעבר במסכה.

מעבר במסכה

$$\psi = \frac{ik_0 A}{2\pi}\iint_{\mathcal{R}} \frac{f(\mathbf{r})}{d}\exp(ik_0 d)\,\mathrm{d}^2\mathbf{r}$$

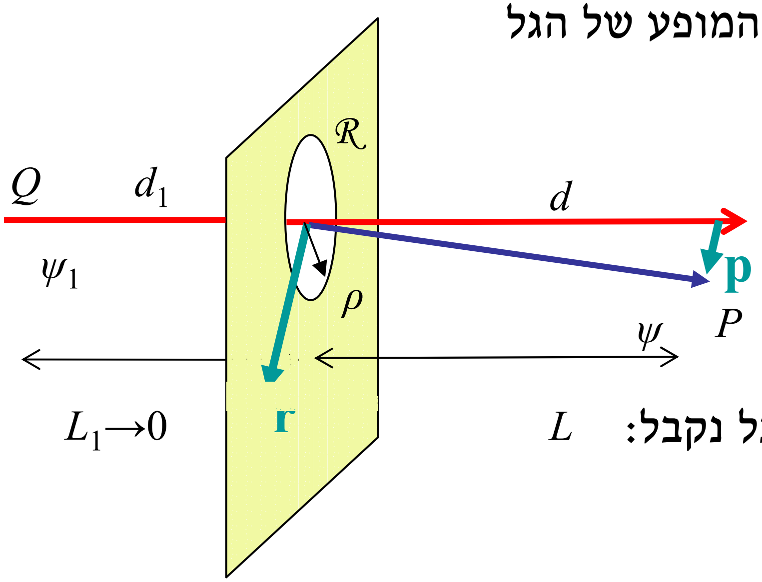
- ההבדלה בין עקיפת פרנל ופראונהופר תלויה בהשתנות גורם המופע $k_0\, d$ בעת המעבר ב-$\mathcal{R}$, בגלל
  - המרחק d בין נקודת הפיזור ונקודת התצפית;
  - גודל המסכה $\mathcal{R}$ שבה $f(\mathrm{r})$ שונה מאפס, כלומר גודל המפתח;
  - אורך הגל $\lambda = 2\pi / k_0$.
- אם $k_0\, d$ משתנה בצורה קוית עם $\mathbf{r}$ אזי זוהי עקיפת פראונהופר (Fraunhofer).
- אם $k_0\, d$ משתנה בצורה לא-קוית עם $\mathbf{r}$ בשיעור $\pi/2$ אזי זוהי עקיפת פרנל (Fresnel).



פרנל ופראונהופר

- ההבדלה בין עקיפת פרנל ופראונהופר ניתנת לכימות.
- נניח שכל הקרינה עוברת ברדיוס ρ בתוך המסך.
- אם הסטיות מן הציר הראשי הן קטנות, אזי בנקודה P יהיה המופע של הגל

$$k_0 d = k_0\sqrt{L^2 + |r-p|^2} \approx k_0 L + \frac{k_0}{2L}\left(r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} + p^2\right) + \cdots$$



- קיבלנו איבר קבוע, איבר תלוי ב-r ואיבר תלוי ב-r^2.
- כיון שתמיד $r < \rho$ יהיה האבר הרבועי המרבי $k_0\rho^2 / 2L$.
- איבר זה צריך להיות קטן יחסית ל- $\pi / 2$, או במונחי אורך גל נקבל:

עקיפת פראונהופר מתקיימת עבור $\rho^2 \geq \lambda L$

עקיפת פרנל מתקיימת עבור $\rho^2 << \lambda L$

- לדוגמה, בתחום הנראה, במפתח של 2 מ"מ תתקיים עקיפת פרנל במרחק פחות משני מטר, ואילו עקיפת פראונהופר בסביבות יותר מעשרה מטר.

טווח סופי

- אם המקור אינו נמצא באינסוף, אלא בטווח סופי, מקבלים את הקירוב

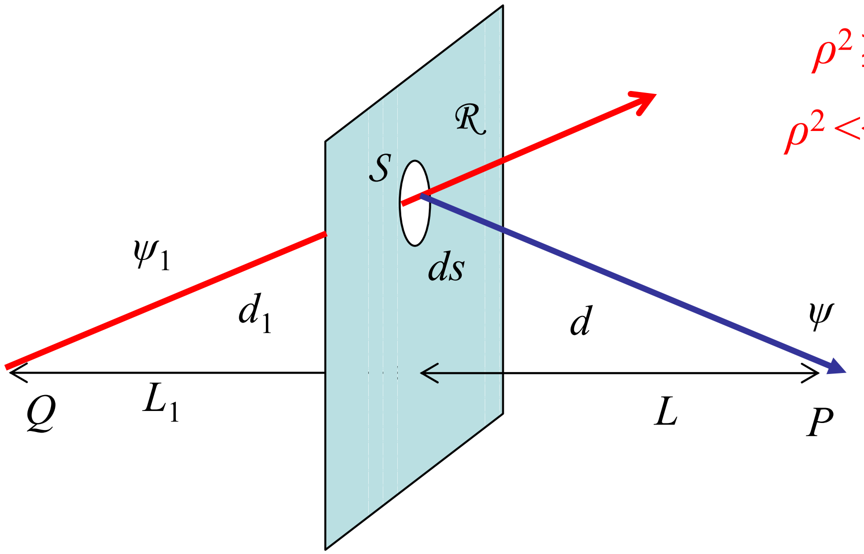
$$k_0\left(d_1+d\right)=k_0\left[\sqrt{L_1^2+r^2}+\sqrt{L^2+\left|r-p\right|^2}\right]$$

$$\approx k_0\left(L+L_1\right)+\frac{k_0r^2}{2}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{L_1}\right)+\frac{k_0p^2}{2L}-\frac{k_0\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{L}+\cdots$$

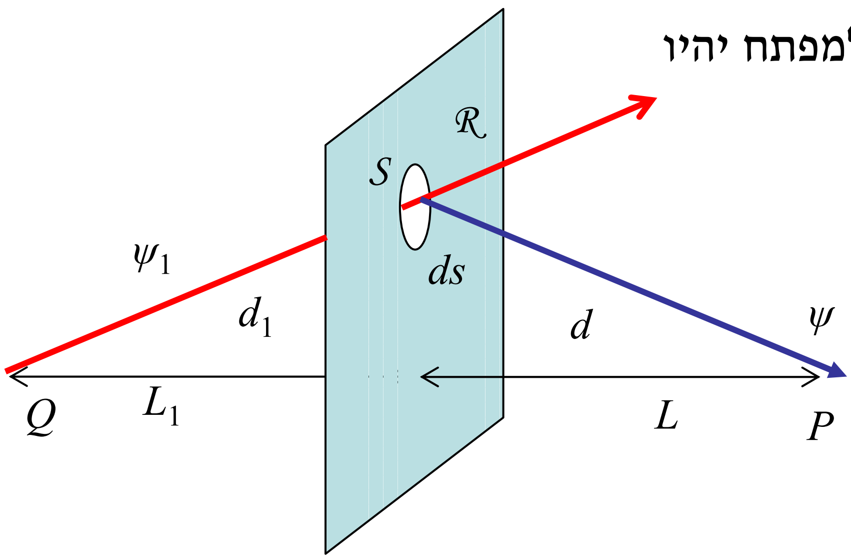
- נקבל כעת:

עקיפת פראונהופר מתקיימת עבור $\rho^2\geq\lambda LL_1/(L+L_1)$

עקיפת פרנל מתקיימת עבור $\rho^2<<\lambda LL_1/(L+L_1)$



צפיה בתבנית עקיפה



- על המקור להיות קטן כדי שהקרנים המגיעות ממנו למפתח יהיו בטווח של חלק קטן של הגל.
- אם רדיוס המקור הוא D, מקבלים

$$\frac{D\rho}{L_1} < \frac{\lambda}{4}$$

- זוהי דרישה שהמקור יהיה קוהרנטי על פני המסכה.
- אם גודל החריר 1 מ"מ והמקור במרחק 1 מ' בנראה, אזי $D < 0.2\ \mathrm{mm}$.
- בגלל המימדים, ניתן לצפות בעקיפת פרנל מיידית על מסך.
- לעקיפת פראונהופר יש צורך להגדיל את הדמות בצורה משמעותית, מה שנעשה על ידי עדשה המביאה את המקור למוקד.
- כך למשל פועלת העין עבור עצמים באינסוף, ויציאה ממיקוד עוברת לעקיפת פרנל.

עקיפת פרנל

- האינטגרל שיש לחשב הוא

$$\psi = \frac{ik_0 A}{2\pi} \iint_{\mathcal{R}} \frac{f(\mathbf{r})}{d} \exp(ik_0 d)\, \mathrm{d}^2\, \mathbf{r}$$

- ניתן לחישוב מספרי, אולם אז מאבדים את האינטואיציה הפיסיקלית.
- נתיחס לבעיות עם סימטריה פשוטה, כגון סימטריה צירית.
- עבור מפתחים קטנים ביחס למרחק לדמות, שוב ניתן לפתח את d בחזקה לפי משפט הבינום.
- בגלל שהשינויים קטנים, נזניח אתם ונחליף את d ב-L:

$$\psi = \frac{ik_0 A}{2\pi} \iint_{\mathcal{R}} \frac{f(\mathbf{r})}{L} \exp\left[ik_0\left(L + \frac{r^2}{L}\right)\right] \mathrm{d}^2\, \mathbf{r}$$

$$= \frac{ik_0 A}{2\pi L} \exp(ik_0 L) \iint_{\mathcal{R}} f(\mathbf{r}) \exp\left(L + ik_0 \frac{r^2}{L}\right) \mathrm{d}^2\, \mathbf{r}$$

- נספוג את גורם המופע $\exp(ik_0 L)$ בתוך המקדם A, כמו שספגנו לתוכו קודם את $\exp(ik_0 L_1)$.

סימטריה עגולה

- האינטגרל שיש לחשב הוא

$$\psi = \frac{ik_0 A}{2\pi L} \iint_{\mathcal{R}} f(\mathbf{r}) \exp\left(L + ik_0 \frac{r^2}{L} \right) \mathrm{d}^2 \mathbf{r}$$

- נשתמש בעובדה שבגוף עגול התלות היא רדיאלית בלבד, ואז מחליפים את r^2 ב-s.
- מקבלים גם

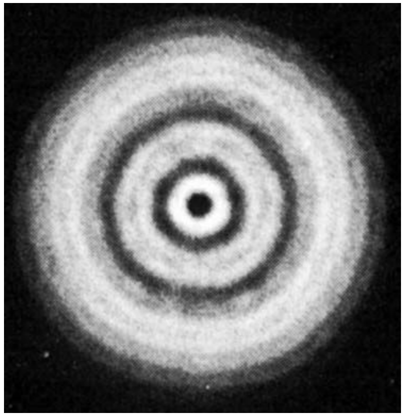
$$\mathrm{d}^2 r = 2\pi r \, \mathrm{d} r = \pi \, \mathrm{d} s$$

- ואז האינטגרל הופך ל-

$$\psi = \frac{ik_0 A}{2L} \int_0^\infty f(s) \exp\left(ik_0 \frac{s}{2L} \right) \mathrm{d} s$$

- שהוא התמרת פוריה (אם כי בגבול שונה במעט, ולא משמעותי פיסיקלית).

מפתח עגול



$$\frac{kR^2}{2L} = 2n\pi$$

$$\psi = \frac{ik_0 A}{2L}\int_0^{\infty} f(s)\exp\left(ik_0\frac{s}{2L}\right)\mathrm{d}s$$

- בחור עגול נתון

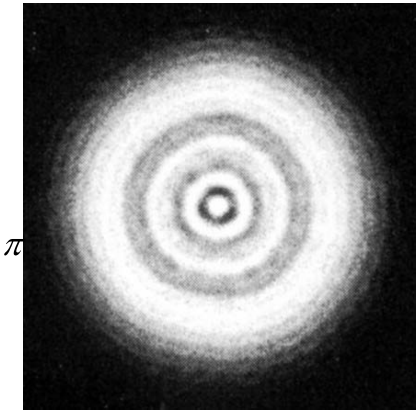
$$f(s) = \begin{cases} 1 & s < R^2 \\ 0 & s \geq R^2 \end{cases}$$

- והגל הוא

$$\psi = \frac{ik_0 A}{2L}\int_0^{R^2} \exp\frac{ik_0 s}{2L}\,\mathrm{d}s = A\left(\exp\frac{ik_0 R^2}{2L} - 1\right)$$

- העוצמה היא ריבוע השדה

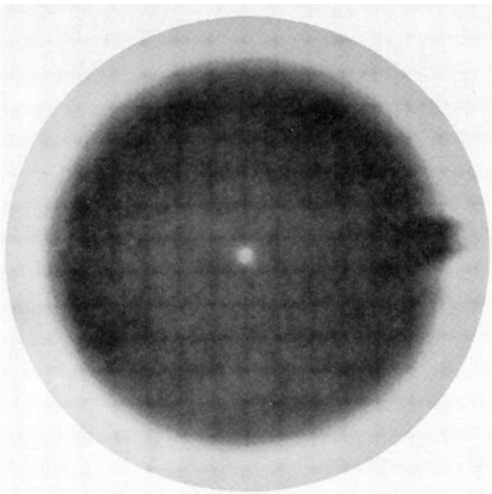
$$|\psi|^2 = 2A^2\left(1 - \cos\frac{ik_0 R^2}{2L}\right)$$



$$\frac{kR^2}{2L} = 2(n+1)\pi$$

- העוצמה משתנה מחזורית עם המרחק ההפכי.

דיסק עגול



$$\psi = \frac{ik_0 A}{2L}\int_0^\infty f(s)\exp\left(ik_0\frac{s}{2L}\right)\mathrm{d}s$$

- בדיסק עגול נתון

$$f(s)=\begin{cases}1 & s>R^2\\ 0 & s\le R^2\end{cases}$$

- והגל הוא

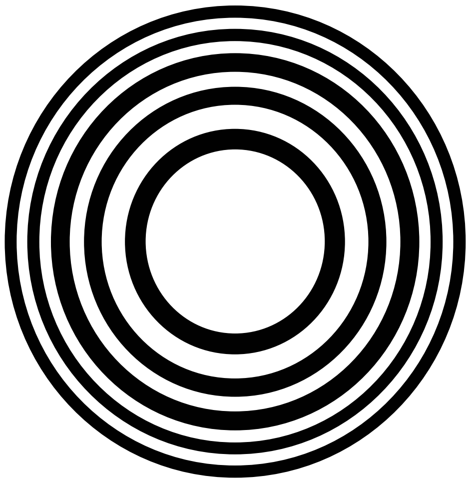
$$\psi = \frac{ik_0 A}{2L}\int_{R^2}^\infty \exp\frac{ik_0 s}{2L}\,\mathrm{d}s = A\left(\exp i\infty - \exp\frac{ik_0 R^2}{2L}\right)$$

- כאן איננו יכולים להזניח את האבר d כיון שאינו קטן יותר ביחס לדיסק, אבל לעומת זאת האבר הראשון בתוצאה לעיל ניתן להזנחה ביחס למרחק d. מקבלים עבור העוצמה

$$|\psi|^2 = A^2$$

- הנקודה הבהירה באמצע צל הדיסק היתה אחת ההוכחות הניצחות לתורת הגלים של האור.

טבלת טבעות (zone plate)



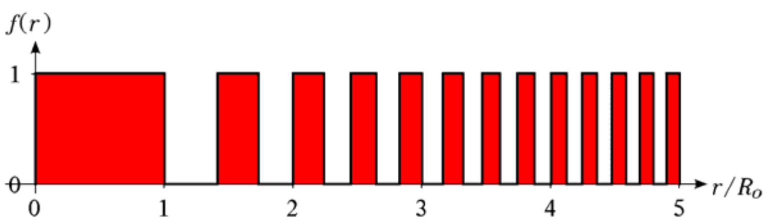
$$\psi = \frac{ik_0 A}{2L}\int_0^\infty f(s)\exp\left(ik_0\frac{s}{2L}\right)\mathrm{d}\,s$$

- ההעברה מחזורית בשטח העיגולים. עבור העיגול ה-n מקבלים

$$f(s) = \begin{cases} 1 & 2nR_0^2 < s \le 2(n+1)R_0^2 \\ 0 & 2nR_0^2 > s \ge 2(n-1)R_0^2 \end{cases}$$

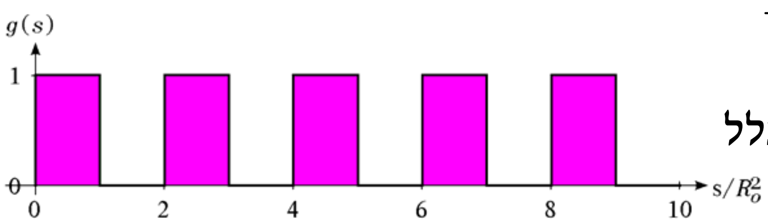
- זהו גל מרובע, שהתמרת פוריה שלו היא פונקציות-δ שערכן יורד לפי

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{ik_0 A}{2m\pi L}$$



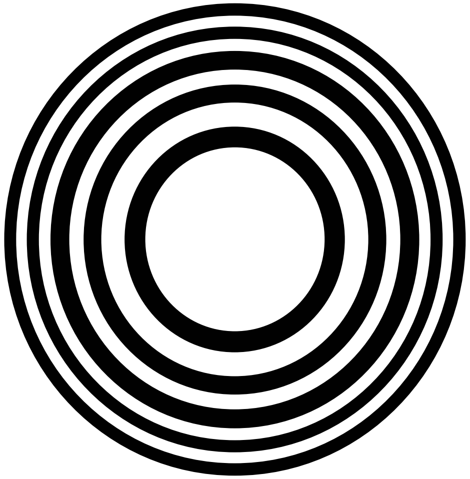
- והן נמצאות במוקדים, המצויים בערכים של L שעבורם

$$\frac{k_0}{L} = \frac{2m\pi}{R_0^2}; \quad m = 2l+1$$



- כאשר מציבים את L מקבלים שכל העוצמות שוות, וזו בגלל ההרמוניות של גל מרובע.

טבלת טבעות כעדשה



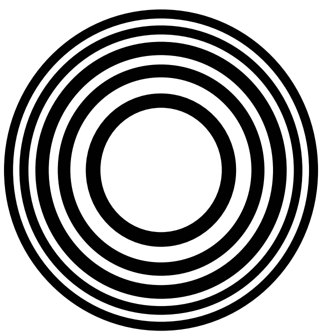
- בגל סינוס $g(s) = [1 - \sin(\pi s/R_0^2)]/2$ רק רכיב אחד, ולכן קיים מוקד עבור $m = 1$.
- גל סינוס יוצר מוקד אחד ממשי ומוקד אחד מדומה, שהם השחזור ההולוגרפי של נקודה.
- אם נסתכל רק על סדר אחד של העקיפה, למשל $n = 1$, ונניח כי העצם (כמו בחישוב העקיפה הבסיסי) במרחק L_1 אזי הדמות תהיה במרחק L המקיים

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L} = \frac{2\pi}{k_0 R_0^2} = \frac{\lambda}{R_0^2}$$

- ממש כמו עדשה שאורך המוקד שלה R_0^2 / λ (עם אברצית צבע עצומה).

מיקרוסקופית רנטגן

- בגלל האנרגיה הגבוהה מאוד של קרני רנטגן, הן חודרות כל חומר. ניתן לראות זאת ממקדם השבירה, שהוא בסדר גודל של 1.0000001.
- לשם כיפוף קרנים משתמשים במראות שבהן ההחזרה קרובה מאוד למשיקה למשטח, למשל לייצור טלסקופי-X לחלל (האטמוספרה אטומה באורך גל זה).
- טבלת הטבעות משמשת כעדשה בגלל קלות הייצור היחסית שלה: טבעות שקופות ואטומות לסרוגין.
- נניח שאורך הגל הוא 50Å, ומרחק המוקד הנדרש 1 מ"מ.
- רדיוס הטבעות נתון על ידי $R_0{}^2 = f\lambda = 5\ \mu\text{m}$
- רדיוס הטבעת ה-n הוא $n^{1/2}R_0$ ועוביה בערך $R_0 / n^{1/2}$.
- טכנולוגית היצור הנדרשת היא עשירית מיקרון, מה שמאפשר מאות טבעות.
- מצפים שכבה של סיליקון ניטריט השקוף לרנטגן בעובי $0.12\ \mu\text{m}$ בזהב ועליו פוטו-רזיסט.
- כותבים את הטבעות באמצעות קרן אלקטרונים.
- מאכלים את הזהב בחומצה וממיסים את הפוטו-רזיסט.

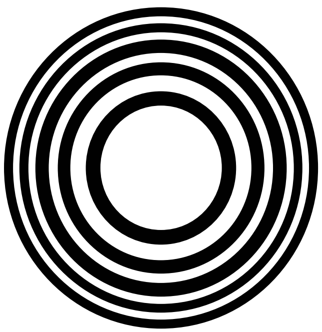


כושר ההפרדה

- כושר ההפרדה הרוחבי שקול לשל עדשה שקוטרה כשל טבלת הטבעות, D. נניח N טבעות ומכאן

$$s_{\max} = \tfrac{1}{4}D^2 = 2NR_0^2$$

- גבול ההפרדה יהיה



$$\delta x_{\min} = f\theta_{\min} = \frac{1.22 f\lambda}{D} = \frac{1.22 f\lambda}{2\sqrt{2N}R_0} = \frac{1.22 R_0}{2\sqrt{2N}}$$

- עובי הטבעת החיצונית יהיה

$$\sqrt{2N}R_0 - \sqrt{2N-1}R_0 \approx \frac{R_0}{\sqrt{2N}}$$

- שהוא קרוב להפרדה הרוחבית (200 Å בטכנולוגיה סטנדרטית).
- את המוקדים הגבוהים חוסמים ואילו המוקד הראשון מוגבל בחדותו עבור מספר טבעות סופי.

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{1}{N} \rightarrow \delta L = \frac{R_0^2 k_0}{2N\pi} = \frac{1}{N}\frac{R_0^2}{\lambda} = \frac{D^2}{8N^2\lambda}$$

- כמו במערכות דימות אחרות, ההגדלה האורכית והרוחבית קשורות על ידי

$$\frac{\delta L}{\lambda} \approx \left(\frac{\delta x_{\min}}{\lambda}\right)^2$$

- ההגדלה האורכית שוה לריבוע ההגדלה הרוחבית, שתיהן ביחידות אורך גל (כאן 4 ו-16 גלים).